Lineaire Algebra - Oefeningen uit Reeks 14 & 15

Assistent: Geoffrey Janssens - `geofjans@vub.ac.be`

Met dank aan: Inneke Van Gelder en Lieven Desmet

Opgaven uit de cursus

1. Oefening 14.1. f_3 en f_6.
2. Oefening 14.2.a.
3. Oefening 14.3.
4. Oefening 14.7. 4, 5, 6
5. Oefening 14.8. f_2 en f_3.
6. Oefening 15.2.
7. Oefening 15.4. 2b, 4b.
8. Oefening 15.7.b.
9. Oefening 15.8.

Afbeeldingen van een eindigdimensionale $\mathbb{R}$-VR E naar zichzelf	
lineaire afbeelding $f : E \to E$	beeld van deelruimte is deelruimte.
affiene afbeelding $g : E \to E : \vec{v} \mapsto f(\vec{v}) + \vec{a}$ waar f lineair en $\vec{a} \in E$	beeld van lineaire variëteit is lineaire variëteit. - evenwijdige variëteiten afgebeeld op evenwijdige variëteiten. - bewaren *deelverhouding* van drie collineaire punten. - een *affiene bijectie* bewaart de dimensie van de variëteit. - *affiene bijecties* vormen groep voor samenstelling.
Bijzonder geval: E is eindigdimensionale Euclidische ruimte	
orthogonale lin. afbeelding $f : E \to E$	- bewaren norm en inproduct, steeds bijectief. - bewaren afstanden: zijn lineaire **isometrieën.** - deelgroep van groep van alle isometrieën.
isometrie $g : E \to E : \vec{v} \mapsto f(\vec{v}) + \vec{a}$ waar f orthogonaal en $\vec{a} \in E$	- bewaren afstanden. - unieke ontbinding in f en $\vec{a}$ - vormen groep voor de samenstelling.
Indeling volgens: det f = 1 : verplaatsingen det f = -1 : anti-verplaatsingen	 - deelgroep voor de samenstelling (bewaren oriëntatie). - geen deelgroep.

Met *deelverhouding* van drie collineaire punten $\vec{x}, \vec{a}, \vec{b}$ (op dezelfde rechte bepaald door $\vec{a}$ en $\vec{b} \neq \vec{a}$) wordt bedoeld de coëfficiënt λ zodat $\vec{x} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$. Men zegt dat affiene bijecties de *affiene structuur bewaren*, isometrieën bewaren bovendien ook de *metrische structuur*.

Opmerking: een isometrie bewaart geen hoeken (Def. 6.1.9) tussen vectoren (hoek tussen $\vec{x}, \vec{y}$ niet i.h.a. zelfde als hoek tussen $g(\vec{x}), g(\vec{y})$), maar wel hoeken in figuren (voor drie punten $\vec{x}, \vec{y}$ en $\vec{z}$ geldt dat $\vec{x} - \vec{z}, \vec{y} - \vec{z}$ en $g(\vec{x}) - g(\vec{z}), g(\vec{y}) - g(\vec{z})$ dezelfde hoek bepalen).

De classificatie van de isometrieën volgt dus uit deze van de orthogonale transformaties en is gebaseerd op de dimensie van V **(dekpunten van f (!))**.

Isometrieën van $\mathbb{E}$		
dim V	det f	
1	1	verschuiving
0	-1	puntsymmetrie
Isometrieën van $\mathbb{E}^2$		
dim V	det f	
2	1	verschuiving
1	-1	schuifspiegeling (spiegeling gevolgd door verschuiving evenwijdig met de spiegelas)
0	1	rotatie rond (m_1, m_2) over hoek $\theta \neq 2k\pi$
Isometrieën van $\mathbb{E}^3$		
dim V	det f	
3	1	verschuiving
2	-1	schuifspiegeling (spiegeling gevolgd door verschuiving evenwijdig met spiegelvlak)
1	1	schroefbeweging (rotatie over hoek $\theta \neq 2k\pi$ gevolgd door verschuiving volgens rotatie-as)
0	-1	spiegelrotatie (rotatie ($\theta \neq 2k\pi$) gevolgd door spiegeling om vlak loodrecht op rotatie-as)