# Lineaire Algebra - Oefeningen uit Reeks 12 & 13

Assistent: Geoffrey Janssens - geofjans@vub.ac.be
Met dank aan: Inneke Van Gelder en Lieven Desmet

**Opgaven uit de cursus**

1. Oefening 12.2.
2. Oefening 12.3.b
3. Oefening 12.4.b
4. Oefening 12.5.b $A_4$
5. Oefening 12.6.b
6. Oefening 12.8
7. Oefening 12.9
8. Oefening 13.1
9. Oefening 13.2
10. Oefening 13.3.b $A_3$
11. Oefening 13.4
12. Oefening 13.8

**Oefeningen voor thuis**

1. Oefening 12.1.
2. Oefening 12.5.b $A_3$
3. Oefening 12.7.
4. Oefening 13.7.
5. Oefening 13.9.b

## Algemene $\mathbb{K}$-VR

- unieke coördinaten t.o.v. basis.
- lineaire afbeeldingen "bewaren de lineaire structuur".
- in deze cursus vooral eindigdimensionale vectorruimten over $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$.

## Eindigdimensionale vectorruimten

- uniek stel coördinaten t.o.v. basis.
- lineaire afbeeldingen voorgesteld door matrices (na vastleggen basissen).

| $n$-dimensionale $\mathbb{R}$-VR | $n$-dimensionale $\mathbb{C}$-VR |
|---|---|
| - isomorf met $\mathbb{R}^n$<br>- matrices $M_{m,n}(\mathbb{R})$ | - isomorf met $\mathbb{C}^n$<br>- matrices $M_{m,n}(\mathbb{C})$ |

- basisveranderingen gegeven door een reguliere vierkante matrix ($\det \neq 0$).

## Bijzondere gevallen: inproductruimten

- bijkomende bewerking: inproduct.
- notie van orthogonaliteit en norm van een vector.
- verschillende theorie (en terminologie) voor reële en complexe inproductruimten.

| Euclidische vectorruimte $E$ (reëel) | Prehilbertruimte $H$ (complex) |
|---|---|
| - inproduct $E \times E \to \mathbb{R}$ (bilineair, symmetrisch en positief definiet)<br>- Vb. $\mathbb{R}^n$ met standaard inproduct<br>$< \vec{x}, \vec{y} >= \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ | - Hilbert inproduct $H \times H \to \mathbb{C}$ (**sesquilineair**, **toegevoegd** symm. en pos. def.)<br>- Vb. $\mathbb{C}^n$ met standaard inproduct<br>$< \vec{z}, \vec{w} >= \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i, \quad \|\vec{z}\|^2 = \sum_{i=1}^n \|z_i\|^2$ |

- een eindigdimensionale inproductruimte heeft steeds een orthonormale basis.

| isomorf met $\mathbb{R}^n$ (met standaard inproduct) | isomorf met $\mathbb{C}^n$ (met standaard inproduct) |
|---|---|

- orthogonaal complement van een eindigdimensionale deelruimte $F$.

| $E = F \oplus F^\perp$ | $H = F \oplus F^\perp$ |
|---|---|

- lin. afbeelding $f : X \to Y$ heeft **unieke toegevoegde** lin. afbeelding $f^\dagger : Y \to X$ (neem orthon. basissen)

| $< f(\vec{x}), \vec{y} >=< \vec{x}, f^\dagger(\vec{y}) > \ \forall \vec{x} \in E, \forall \vec{y} \in F$<br>als $A = [f]_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$ dan $[f^\dagger]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = A^t$ | $< f(\vec{x}), \vec{y} >=< \vec{x}, f^\dagger(\vec{y}) > \ \forall \vec{x} \in H, \forall \vec{y} \in K$<br>als $A = [f]_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$ dan $[f^\dagger]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \bar{A}^t$, noteer $A^\dagger$ |
|---|---|

- bijzondere lin. afbeeldingen (naar zelfde ruimte): **zelftoegevoegd** als $f = f^\dagger$ **(steeds diagonaliseerbaar)**.

| $f : E \to E$ zelftoegevoegd, **symmetrische** matrix $A = A^t$ (t.o.v. orthon. basis)<br>- heeft orthonormale basis eigenvectoren<br>- alle eigenwaarden reëel | $f : H \to H$ **hermitisch**, heeft **hermitische** matrix $A = \bar{A}^t = A^\dagger$ (t.o.v. orthon. basis)<br>- heeft orthonormale basis eigenvectoren<br>- alle eigenwaarden reëel |
|---|---|

- bijzondere lin. afbeeldingen (naar zelfde ruimte): **normbewarend** ($\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$ voor alle vectoren $\vec{x}$)

| **orhogonale** lineaire afbeeldingen<br>$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E :< \vec{x}, \vec{y} >=< f(\vec{x}), f(\vec{y}) >$<br>- zijn bijectief $f^{-1} = f^\dagger$ (ook orthogonaal)<br>- bewaren orthonormale basissen | **unitaire** lineaire afbeeldingen<br>$\forall \vec{x}, \vec{y} \in H :< \vec{x}, \vec{y} >=< f(\vec{x}), f(\vec{y}) >$<br>- zijn bijectief $f^{-1} = f^\dagger$ (ook unitair)<br>- bewaren orthonormale basissen<br>- hebben orthon. basis eigenvect. (diagonaliseerbaar met eigenwaarden op eenheidscirkel) |
|---|---|

- normbewarende lin. afbeeldingen hebben speciale matrices (t.o.v. orthonormale basis).

| **orhogonale matrices** $A$ (dus $\in M_{n,n}(\mathbb{R})$)<br>- indien $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : X \mapsto AX$ orthogonaal<br>- $\det A = \pm 1$ en $A^{-1} = A^t$<br>- kolommen (rijen) orthonormale basis $\mathbb{R}^n$<br>- matrices voor basisveranderingen (orthon.) | **unitaire matrices** $A$ (dus $\in M_{n,n}(\mathbb{C})$)<br>- indien $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n : Z \mapsto AZ$ unitair<br>- $\lvert \det A \rvert = 1$ en $A^{-1} = \bar{A}^t = A^\dagger$<br>- kolommen (rijen) orthonormale basis $\mathbb{C}^n$<br>- matrices voor basisveranderingen (orthon.) |
|---|---|

- specifieke toepassingen.

| meetkunde: ruimten $\mathbb{E}^2$ en $\mathbb{E}^3$<br>- loodrechte stand en hoeken $\cos\theta = \frac{<\vec{x},\vec{y}>}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$<br>- positief georiënteerde orthonormale basis<br>- vectorieel product $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$<br>- notie van oppervlakte en volume (via det)<br>- **isometrieën** gebaseerd op orthogonale afb. | natuurkunde (o.a. quantummechanica) |
|---|---|

- volledige genormeerde ruimten in de analyse (vaak oneindigdimensionaal).

| Banachruimte | Hilbertruimte |
|---|---|