Lineaire Algebra - Oefeningen uit Reeks 8

Assistent: Geoffrey Janssens - geofjans@vub.ac.be
Met dank aan: Inneke Van Gelder en Lieven Desmet

Opgaven uit de cursus

1. Oefening 8.1 2b
2. Oefening 8.3.
3. Oefening 8.6.
4. Oefening 8.7.b
5. Oefening 8.9.
6. Oefening 8.10.
7. Oefening 8.12.
8. Oefening 8.13.

Oefeningen voor thuis

1. Oefening 8.2.b
2. Oefening 8.8.
3. Oefening 8.11.
4. Oefening 8.14.

Bijkomende oefeningen

1. Zij $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ (beschouwd als kolommen). Bewijs dat
$[\det\,(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})]\vec{a} - [\det\,(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d})]\vec{b} + [\det\,(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})]\vec{c} - [\det\,(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})]\vec{d} = \vec{0}$.

2. Zij $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K}), B \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K}), C \in \mathrm{M}_{pp}(\mathbb{K})$. Zij $P = \begin{pmatrix} A & B \\ O_{p,n} & C \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n+p,n+p}(\mathbb{K})$. Toon dat $\det(P) = \det(A)\det(C)$.
Hint: Verifieer dat $P = \begin{pmatrix} I_n & O_{n,p} \\ O_{p,n} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ O_{p,n} & I_p \end{pmatrix}$.

3. Zij gegeven een stel vectoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ in $\mathbb{R}^n$. Als $\vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$, dan definiëren we $\vec{b}_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ voor $i = 1, ..., n$. Toon dat volgende eigenschappen equivalent zijn:

   (a) $\vec{a}_2 - \vec{a}_1, ..., \vec{a}_n - \vec{a}_1$ zijn lineair onafhankelijk in $\mathbb{R}^n$.
   (b) $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$ zijn lineair onafhankelijk in $\mathbb{R}^{n+1}$.

   Onder deze equivalente voorwaarden noemt men het stel $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ *affien onafhankelijk*. Toon aan dat dit precies betekent dat deze punten een hypervlak bepalen. Geef een beschrijving van dit hypervlak als lineaire variëteit (een punt en de deelruimte). Leg ook het verband met oefening 8.12.