1. Permutations et leur signature

1.1. Définition et décomposition en cycles.

Définition 1.1. Une permutation d'un ensemble X est une bijection de X vers lui-même. Autrement dit, une permutation de X est une application $\sigma : X \to X$ telle que pour tout $y \in X$, il existe un unique $x \in X$ tel que $\sigma(x) = y$.

Si $X = \{1, \dots, n\}$ on écrit

$$S_n := \{\text{permutations de } \{1, \dots, n\}\}.$$

Il existe plusieurs manières de visualiser une permutation. Une première est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.2. Soit $X = \{1, 2, \dots, 8\}$ et considérons la permutation suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

On peut visualiser σ de la manière suivante :

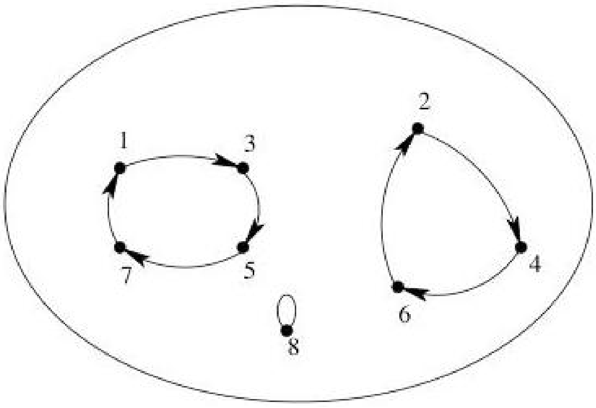

Figure 1. Une permutation de $\{1, 2, \dots, 8\}$

Par la suite on appellera $(1, 3, 5, 7)$, $(2, 4, 6)$ et (8) les cycles de σ. On a que

$$\sigma = (1, 3, 5, 7) \circ (2, 4, 6) \circ (8). \tag{1}$$

Remarquons qu'il n'est pas important dans quel ordre nous écrivons les cycles. Il n'a pas non plus d'importance avec quel élément de cycle nous commençons : le cycle $(1, 3, 5, 7)$ peut aussi être écrit $(3, 5, 7, 1)$ ou $(5, 7, 1, 3)$ ou $(7, 1, 3, 5)$. Les cycles de longueur 1 (ceux-ci correspondent aux points fixes de la permutation) sont parfois omis : $\sigma = (1, 3, 5, 7) \circ (2, 4, 6)$. Ainsi, par exemple, $(2, 4, 6)$ représente la permutation suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Il y a donc une ambiguïté dans nos notations, $(2, 4, 6)$ représente à la fois un cycle et une permutation complète ; cela ne mène en général pas à confusion.

On va maintenant généraliser l'exemple ci-dessus. Pour cela, nous avons besoin de l'observation suivante.

Exercice 1.3. Soit $\sigma \in S_n$. Alors pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma^m(i) = i$.

Grace à l'exercice ci-dessus, lorsqu'on applique la permutation σ à i, on obtient successivement les valeurs i, $\sigma(i)$, $\sigma^2(i)$, ..., $\sigma^{m-1}(i)$. Les valeurs obtenues sont appelées *l'orbite de i sous la permutation σ* et on écrit $\mathcal{O}_n(i)$ pour celui-ci. Nous appelons *m la longueur de l'orbite*. On y associe un *cycle*

$$\left(i,\, \sigma(i), \sigma^2(i), \ldots, \sigma^{m-1}(i)\right).$$

Remarque 1.4. La relation "appartenir à la même orbite" est une relation d'équivalence. Par conséquent, les orbites forment une partition de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Concrètement, ça veut dire que deux orbites $\mathcal{O}_n(i)$ et $\mathcal{O}_n(j)$ sont égales ou disjointes. Donc, si $j = \sigma^k(i)$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, alors $\mathcal{O}_n(i) = \mathcal{O}_n(j)$. En particulier, les orbites de i et $\sigma^k(i)$ sont égales et, par conséquent, $(i,\, \sigma(i), \sigma^2(i), \ldots, \sigma^{m-1}(i))$ et $\left(\sigma^k(i), \ldots, \sigma^{m-1}(i), i, \ldots, \sigma^{k-1}(i)\right)$ sont considérés égaux.

Si l'on connaît les cycles d'une permutation σ, alors on connaît complètement la permutation σ. En déterminant tous les cycles de σ, on peut écrire

$$\sigma = (a_1, \ldots, a_k) \circ \cdots \circ (b_1, \ldots, b_l).$$

On exige que chaque élément apparaisse dans exactement un cycle. On omet parfois les cycles (i) de longueur une ; pour un tel chiffre i, on a $\sigma(i) = i$.

1.2. **Décomposition en transpositions.** Une *transposition* est une permutation dans laquelle deux éléments sont échangés, et tous les autres sont laissés fixes. Une transposition est donc une permutation du type $\sigma = (i, j)$ avec $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$. Dans l'image suivante, nous voyons une représentation visuelle d'une transposition.

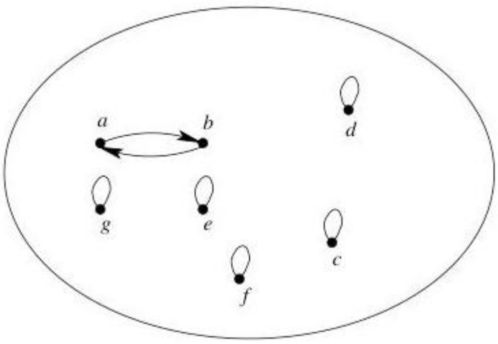

FIGURE 2. Une transposition

Théorème 1.5. *Toute permutation $\sigma \in S_n$ peut être écrite comme une composition de transpositions.*

Démonstration. Il suffit de montrer que chaque cycle de la permutation peut être écrit comme une composition de transpositions. Nous affirmons que

$$(a_1, a_2, \ldots, a_r) = (a_1, a_r) \circ (a_1, a_{r-1}) \circ \cdots \circ (a_1, a_2) \tag{2}$$

Cela peut être démontré par induction sur r. Pour $r = 2$ c'est clair.
Supposons que (2) est vraie pour $r - 1$. Il suffit alors de montrer que

$$(a_1, a_2, \ldots, a_r) = (a_1, a_r) \circ (a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}) \tag{3}$$

Posons $\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_{r-1})$ et $\tau = (a_1, a_r)$. La composition $\tau \circ \sigma$ est donnée par :

$$\begin{array}{ccccc}
a_1 & \overset{\sigma}{\mapsto} & a_2 & \overset{\tau}{\mapsto} & a_2 \\
a_2 & \overset{\sigma}{\mapsto} & a_3 & \overset{\tau}{\mapsto} & a_3 \\
a_3 & \overset{\sigma}{\mapsto} & a_4 & \overset{\tau}{\mapsto} & a_4 \\
\vdots & & & & \\
a_{r-1} & \overset{\sigma}{\mapsto} & a_1 & \overset{\tau}{\mapsto} & a_r \\
a_r & \overset{\sigma}{\mapsto} & a_r & \overset{\tau}{\mapsto} & a_1
\end{array}$$

et nous voyons que $(\tau \circ \sigma)(a_i) = a_{i+1}$ pour $i < r$ et $(\tau \circ \sigma)(a_r) = a_1$, autrement dit $\tau \circ \sigma = (a_1, a_2, \dots, a_r)$, ce qui démontre (3). $\square$

Étant donnée une permutation σ, il existe de nombreuses manières de l'écrire comme composition de transpositions.

Exemple 1.6. Considérons la permutation $(3, 2, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Alors on a que

$$\begin{aligned}
(3, 2, 1) &= (3, 1) \circ (3, 2) \\
&= (1, 2) \circ (2, 3) \circ (3, 1) \circ (1, 2)
\end{aligned}$$

où la première décomposition avait été démontrée dans (2).

1.3. **La signature d'une permutation.** Si une permutation σ peut être écrite comme la composition d'un nombre pair (resp. impair) de transpositions, alors nous disons que la *parité* de σ est paire (resp. impair). Tel qu'on a vu dans l'exemple 1.6, il y a ici une difficulté, car une permutation peut être écrite de nombreuses manières comme un produit de transpositions. Par conséquent, pour montrer que cette terminologie est bien définie on a besoin du lemme suivant.

Lemme 1.7. *Si une permutation peut être écrite de deux manières comme composition de transpositions, alors la différence du nombre de transpositions est paire.*

Afin de démontrer le lemme 1.7, on introduit une fonction avec valeurs dans ± 1 qui est clairement bien définie et qui mesure le nombre de transpositions.

Définition 1.8. L'application $\operatorname{sgn} : S_n \to \{-1, 1\}$ définie par

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si le nombre de cycles de } \sigma \text{ de longueur paire est pair,} \\ -1 & \text{si le nombre de cycles de } \sigma \text{ de longueur paire est impair} \end{cases}$$

est appelée la *signature* de la permutation σ.

En particulier, la signature d'un cycle est le suivant

$$\operatorname{sgn}((a_1, \dots, a_k)) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est impair,} \\ -1 & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases} \tag{4}$$

Exemple 1.9. Considérons la permutation $\sigma \in S_8$ introduite dans l'exemple 1.2. On a vu que σ possède un cycle de longueur paire et deux cycles de longueur impaire. Par conséquent, $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$.

Le lemme 1.7 suit directement du résultat suivant.

Théorème 1.10. *Soit $\sigma \in S_n$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Alors*

$$\operatorname{sgn}((i, j) \circ \sigma) = -\operatorname{sgn}(\sigma).$$

Par conséquent, si $\sigma \in S_n$ peut être écrite comme la composition de p transpositions, alors

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^p.$$

Démonstration du Théorème 1.10. Nous distinguons deux cas.

Premier cas : i et j appartiennent au même cycle de σ. Écrivons ce cycle sous la forme $(i = a_1, a_2, \dots, a_k = j, \dots, a_m)$. Nous pouvons vérifier facilement que (procéder comme dans la preuve du Théorème 1.5)

$$(a_1, a_k) \circ (a_1, \dots, a_m) = (a_1, \dots, a_{k-1}) \circ (a_k, \dots, a_m).$$

Les autres cycles ne changent pas, et on voit que la signature change dans tous les cas : si m est pair, les deux nouveaux cycles ont soit tous les deux une longueur paire, soit tous les deux une longueur impaire, de sorte que le nombre total de cycles de longueur paire augmente ou diminue de un. Si m est impair, l'un des deux nouveaux cycles est de longueur paire et l'autre de longueur impaire, de sorte que le nombre de cycles de longueur paire augmente d'un.

Deuxième cas : i et j n'appartiennent pas au même cycle de σ. Écrivons ces cycles sous la forme $(i = a_1, \dots, a_m)$ et $(j = b_1, \dots, b_r)$. Dans ce cas-là :

$$(a_1, b_1) \circ (a_1, \dots, a_m) \circ (b_1, \dots, b_r) = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_r) .$$

Les autres cycles restent inchangés. Dans tous les cas, la signature change de la même manière que dans le premier cas. □

Exercice 1.11. Démontrer que $\mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \mathrm{sgn}(\tau)$.

2. Déterminants via permutations

Au premier quadrimestre, dans le cours MathF121, on a apprit à résoudre les systèmes à n équations linéaires. Pour faire cela on associa une $n \times n$ matrice $A = (a_{ij})$. Si cette matrice était inversible, alors le système avait une solution unique. Dans cette section on va associer à A un chiffre qui mesure l'existence d'une solution unique.

Définition 2.1. Le déterminant d'une $n \times n$ matrice $A = (a_{i,j})$ est donné par

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}.$$

En mots, le produit $a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}$ est un choix de coefficients de A, un dans chaque rangée de A et de telle manière qu'on n'en a pas choisi deux dans la même colonne.

Exemple 2.2. Supposons que $n = 2$. Donc $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $S_2 = \{\mathrm{id}, (12)\}$. Il suit de (4) que $\mathrm{sgn}(\mathrm{id}) = 1$ et $\mathrm{sgn}(12) = -1$. Rappelons que le cycle (12) est la fonction $\sigma : 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1$. Donc la formule du déterminant prend la forme suivante :

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Remarquez que $a_{11}a_{22}$ est le produit des coefficients sur la diagonale et $a_{12}a_{21}$ ceux sur l'antidiagonale. Donc„ en effet, dans chaque terme on a choisi un coefficient par rangée, sans en choisir deux dans la même colonne.

Considérons maintenant des matrices de taille 3×3.

Exemple 2.3. Si $n = 3$, alors $|S_3| = 3! = 6$. Plus précisément :

$$S_3 = \{\mathrm{id}, (12), (13), (23), (123), (132)\}.$$

Grace à (4) on sait que $\mathrm{sgn}(i\,j) = -1$ et $\mathrm{sgn}(123) = \mathrm{sgn}(132) = 1$. Rappelons que le cycle (123) (resp. (132)) est la fonction

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, le déterminant a la forme suivante :

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}.$$

Par exemple, le terme $a_{13}a_{21}a_{32}$ correspond au choix suivant de coefficients

$$\begin{pmatrix} & & \bullet \\ \bullet & & \\ & \bullet & \end{pmatrix}.$$

En tant que le dernier exemple on va considérer des matrices triangulaires.

Exemple 2.4. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ * & b_2 & 0 & \cdots \\ * & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & * & b_n \end{pmatrix}$$

où il n'y que des zéros au-dessus de la diagonale et des valeurs inconnues en-dessous de la diagonale. Afin de calculer un terme $a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$ de $\det(A)$ on doit commencer par choisir un coefficient dans la première rangée. Cependant choisir un zéro créera un produit zéro qui ne contribue pas à la somme. Donc on n'a que $a_{1,1} = b_1$ et $\sigma(1) = 1$. Par la suite on considère la deuxième rangée où il n'y a que deux coefficients non-zéros. Cependant, ayant déjà choisi un coefficient dans la première colonne on est obligé de choisir b_2 et alors $\sigma(2) = 2$. Ce résonnement clairement se poursuit et on obtient que $\sigma(i) = i$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et la seule permutation qui donne un produit non-zéro. Donc

$$\det(A) = b_1. \cdots .b_n$$

est le produit des coefficients sur la diagonale.

Commençons par regarder des propriétés générales du déterminant.

Proposition 2.5. *Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice $n \times n$. Alors*

$$\det(A) = \det(A^t).$$

Démonstration. L'égalité suit en récrivant la somme :

$$\begin{aligned} \det(A^t) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\left(\sigma^{-1}\right) a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

Dans la deuxième égalité on a utilisé que $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$. Ceci peut être vu en utilisant (2) et en remarquant que l'inverse est donné par la composition des transpositions dans l'ordre opposé. Par conséquent, σ^{-1} peut être écrit dans le même nombre de transpositions et l'assertion suit du théorème 1.10. □

Une conséquence agréable de la proposition 2.5 est qu'on peut calculer le déterminant en fonction des colonnes à la place des rangées :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \tag{5}$$

Dans la prochaine proposition on considère l'effet sur le déterminant des opérations admissent dans la réduction de Gauss-Jordan.

Proposition 2.6. *Soit $A = (\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n})$ une matrice $n \times n$ et k un scalaire. Alors on a les propriétés suivantes :*

(1) $\det(I_n) = 1$,

(2) $\det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_i} + k\,\vec{b}, \ldots, \vec{a_n}) = \det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}) + k\det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{a_n})$,

(3) $\det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_i}, \ldots, \vec{a_j}, \ldots, \vec{a_n}) = \det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_j}, \ldots, \vec{a_i}, \ldots, \vec{a_n})$.

La deuxième propriété s'appelle la multilinéarité *et la dernière l'*alternance*.*

Remarque 2.7. Grace à la proposition 2.5 on a également la multilinéarité et l'alternance dans les rangées. En particulier, ces propriétés décrivent comment le déterminant change sous les opérations dans un procédé de Gauss-Jordan.

Démonstration de la Proposition 2.6. Le premier énoncé suit de l'exemple 2.4.

Le deuxième énoncé suit en récrivant bien chaque terme et en utilisant l'expression (5) en fonction des colonnes. Pour faire cela, nous écrivons

$$\vec{a_i} = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

On trouve :

$$\begin{aligned} \det(\vec{a_1} + k\,\vec{b}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}) &= \sum_{\sigma \in S_n} (a_{\sigma(1),1} + k\,b_{\sigma(1)}) a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} + \sum_{\sigma \in S_n} k\,b_{\sigma(1)} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ &= det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}) + k\det(\vec{b}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}). \end{aligned}$$

On a pu choisir $i = 1$ grâce au (2) qu'on considère maintenant. Supposons que l'on échange les colonnes $\vec{a}_i$ et $\vec{a}_j$ et notons $B = (b_{k,l})$ la matrice obtenue. Alors

$$b_{k,l} = a_{k,\tau(l)},$$

où $\tau = (i\ j)$ est la transposition qui échange i et j. On a donc

$$\begin{aligned} \det(B) &= \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}. \\ &= \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1(\tau\circ\sigma)(1)} \cdots a_{n(\tau\circ\sigma)(n)} \end{aligned}$$

Posons maintenant $\rho = \tau \circ \sigma$. Alors $\sigma = \tau^{-1} \circ \rho = \tau \circ \rho$. Il suit de l'exercice 1.11 que

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau \circ \rho) = \operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\rho) = -\operatorname{sgn}(\rho).$$

Ainsi,

$$\det(B) = \sum_{\rho \in S_n} -\operatorname{sgn}(\rho)\, a_{1\rho(1)} \cdots a_{n\rho(n)} = -\det(A). \qquad \square$$

Exercice 2.8. En utilisant les propriétés du déterminant vues dans la proposition 2.6, démontrez que $\det(A) = 0$ si A a deux colonnes identiques (si le corps est de caractéristique différente de deux).

3. L'unicité du déterminant en tant que fonction

Si on note $A = (\vec{a_1} \cdots \vec{a_n})$, où les colonnes sont des vecteurs dans $\mathbb{K}^n$, où $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique différente de deux, alors le déterminant peut être vu comme une application

$$\det : (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K} : (\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}) \mapsto \det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}).$$

Autrement dit, le déterminant prend n vecteurs colonnes et leur associe un scalaire. Avec ce point de vue, la terminologie de multilinéarité dans la proposition 2.6 se clarifie : elle exprime que la fonction est linéaire dans chacun de ces arguments.

Théorème 3.1. *Il existe une unique application*

$$D : (\mathbb{K}^n)^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

qui vérifie les trois propriétés suivantes :

(1) D est multilinéaire,

(2) D est alternée,

(3) $D(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}) = 1$, où $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Cette unique application est le déterminant de la définition 2.1.

Démonstration. Dans la proposition 2.6 on a vu que le déterminant satisfait ces propriétés. Par conséquent, il nous reste à démontrer l'unicité. Prenons $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^n$ et écrivons chaque vecteur dans la base canonique :

$$\vec{a}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \vec{e}_i.$$

Par multilinéarité, on a

$$\begin{aligned} D(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) &= D\left(\textstyle\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} \vec{e}_{i_1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n} \vec{e}_{i_n}\right). \\ &= \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{n} a_{i_1 1} \cdots a_{i_n n} D(\vec{e}_{i_1}, \ldots, \vec{e}_{i_n}). \end{aligned}$$

Du fait que D est alternée, il suit de l'exercice 2.8 que $D(\vec{e_{i_1}}, \ldots, \vec{e_{i_n}}) = 0$ dès que deux indices i_k sont égaux. Les seuls termes non nuls sont donc ceux pour lesquels $(i_1, \ldots, i_n)$ est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$. Par conséquent, on peut donc écrire

$$D(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} D(\vec{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{e}_{\sigma(n)}).$$

Comme D est alternée, échanger deux arguments change le signe. Donc

$$D(\vec{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{e}_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) D(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n).$$

Or $D(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = 1$. Ainsi, $D(\vec{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{e}_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$ et par conséquent,

$$D(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Cette formule est exactement la formule du déterminant développée selon les colonnes, obtenue dans (5). Donc, toute application D vérifiant les trois propriétés est nécessairement le déterminant. Cela prouve l'unicité. □